Sujet de première épreuve du capes externe 2006

# UNE EXPLICATION INTUITIVE DE LA VALEUR TROUVÉE POUR L'ESPÉRANCE DE LA DURÉE DE LA PARTIE

Pour N quelconque et $p = ½$, on suppose que le jeu, au lieu de s'arrêter, reprend comme au début après chaque gain.

Chaque joueur entrant avait une probabilité de $\frac{1}{2^N}$ d'être gagnant.

Au jeu *n* (on considère que *n* augmente indéfiniment, et on considérera donc qu'il tend vers l'infini), nous aurons comme entrant le joueur numéro $n + G_n$, où $G_n$ est le nombre des gains déjà observés ; en effet, après chaque gain, ce sont *deux* nouveaux joueurs qui entrent simultanément). Le sort final est déjà déterminé pour tous les joueurs ayant perdu, ou qui sont sortis vainqueurs, c'est-à-dire pour tous les joueurs excepté l'entrant et celui qui lui fait face. Cela fait $n + G_n + o(n + G_n)$ joueurs. Une application « à la hussarde » de la loi des grands nombres nous amènerait à :

$$\frac{1}{2^N}(n + G_n + o(n + G_n)) = G_n + o(G_n)$$

*Remarque :* il n'y a certes pas indépendance entre les événements affectant tous les joueurs, mais cela se produit seulement entre ceux dont le rang d'entrée diffère au plus de $N - 1$, ce qui est peu lorsque *n* tend vers l'infini.

Pour les espérances, on écrirait donc, toujours aussi audacieusement :

$$\frac{1}{2^N}(n + E(G_n)) \approx E(G_n)\text{, d'où } E(G_n) \approx \frac{n}{2^N - 1}.$$

Mais si $T$ désigne le temps d'attente d'un gain, le temps écoulé jusqu'au $G_n$-ième gain sera nécessairement d'espérance $E(T).G_n$, et le jeu $n$ se produit à distance presque sûrement finie du jeu ayant donné lieu au $n$-ième gain. On écrirait donc $n = E(T)E(G_n) + o(n)$, c'est-à-dire

$$n \approx E(T)E(G_n)$$

….. ce qui met bien en évidence la valeur attendue $E(T) = 2^N - 1$.

Il n'est pas la peine d'insister sur le fait que ce raisonnement manque totalement de rigueur au sens habituel du terme. Il me semble malgré tout qu'il donne une explication « évidente », et à mon avis convaincante, de la valeur trouvée pour $E(T)$.